Maxime PELLETIER

## Travail Encadré de Recherche

# Analyse harmonique sur $SU_2(\mathbb{C})$ : polynômes de Jacobi et équation de la chaleur

Encadré par M. Jérôme GERMONI

*Master 1 Mathématiques Générales 2011-2012*

# Introduction

L'objectif de ce Travail Encadré de Recherche est d'illustrer des applications de certains outils comme les représentations et les algèbres de Lie dans le cas d'un groupe très simple : $SU_2(\mathbb{C})$ (que nous noterons par la suite seulement $SU_2$, puisqu'il n'y aura pas d'ambiguïté), qui a la particularité d'être un groupe compact. Nous verrons principalement deux applications de ces outils.

La première application concernera certaines fonctions spéciales particulières qui sont les polynômes de Jacobi. Ils forment une famille de polynômes orthogonaux et l'essentiel de cette partie consistera à retrouver, grâce aux représentations de $SU_2$, les relations d'orthogonalité entre ces polynômes. La deuxième application est liée à l'analyse harmonique et aux équations aux dérivées partielles. Il s'agira de résoudre, sous une certaine forme, l'équation de la chaleur sur le groupe $SU_2$. Nous utiliserons la décomposition de fonctions sur $SU_2$ en série de Fourier, ce qui nécessite là encore de connaître les représentations de ce groupe.

Pour cela, il faudra bien entendu donner tout d'abord les outils que nous allons utiliser. Cela commencera évidemment par un certain nombre de définitions (concernant la mesure de Haar, les algèbres de Lie, et les représentations), puis par plusieurs théorèmes très importants : Schur, Peter-Weyl, Plancherel... Une longue partie sera ensuite consacrée à la recherche des représentations irréductibles de $SU_2$, et enfin nous pourrons passer aux deux applications détaillées précédemment.

# Table des matières


**1 Généralités** **3**

1.1 Mesure de Haar . . . 3

1.1.1 Définition et expression pour un groupe fini . . . 3

1.1.2 Théorème général d'existence . . . 4

1.2 Algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ . . . 4

1.3 Représentations . . . 5

1.3.1 Premières définitions sur les représentations . . . 6

1.3.2 Représentation dérivée . . . 7

1.3.3 Lemme de Schur . . . 9

1.3.4 Relations d'orthogonalité de Schur . . . 9

1.3.5 Théorèmes de Peter-Weyl et de Plancherel . . . 12

**2 Représentations de $SU_2$ et polynômes de Jacobi** **15**

2.1 Mesure de Haar sur $SU_2$ . . . 15

2.2 Représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . . . 16

2.2.1 Des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans un espace de polynômes . . . 16

2.2.2 Les $\rho_m$ sont les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . . . 19

2.3 Représentations irréductibles de dimension finie de $SU_2$ . . . 21

2.4 Coefficients matriciels et polynômes de Jacobi . . . 23

2.4.1 Première expression des coefficients matriciels . . . 23

2.4.2 Relation avec un polynôme de Jacobi . . . 25

2.4.3 Utilisation des relations d'orthogonalité de Schur . . . 26

2.4.4 Relation d'orthogonalité pour les polynômes de Jacobi . . . 27

**3 Equation de la chaleur sur $SU_2$** **29**

3.1 Opérateurs de Casimir et de Laplace sur $SU_2$ . . . 29

3.1.1 Quelques résultats généraux . . . 29

3.1.2 Application à $SU_2$ . . . 31

3.2 Séries de Fourier sur $SU_2$ . . . 33

3.3 Equation de la chaleur . . . 34

3.3.1 Unicité de la solution . . . 35

3.3.2 Expression de la solution . . . 36

# 1 Généralités

## 1.1 Mesure de Haar

On va dans cette partie définir dans un groupe localement compact la notion de mesure invariante à gauche, que l'on appellera ensuite mesure de Haar. On donnera également un théorème général d'existence d'une telle mesure.

### 1.1.1 Définition et expression pour un groupe fini

**Définition 1.1.** *Soit $G$ un groupe topologique localement compact. Une mesure positive $\mu$ est dite invariante à gauche si, pour tout $g \in G$ et pour toute $f \in \mathcal{C}_C(G)$ (espace des fonctions continues sur $G$ et de support compact),*

$$\int_G f(gx)\mu(dx) = \int_G f(x)\mu(dx).$$

*C'est équivalent à dire que, pour tout $E$, sous-ensemble mesurable de $G$, et pour tout $g \in G$,*

$$\mu(gE) = \mu(E).$$

**Définition 1.2.** *Une mesure invariante à gauche sur un groupe localement compact est appelée mesure de Haar à gauche.*

On verra par la suite qu'une telle mesure existe toujours, mais intéressons-nous pour l'instant à cette mesure dans un cas particulièrement simple qui est celui des groupes finis.

Soit $G$ un groupe fini. Pour définir une mesure sur $G$, il suffit de la définir sur $\{g\}$, pour tout $g \in G$. Soit $\mu$ une mesure sur $G$. Si $\mu$ est invariante à gauche, on a, pour tout $g \in G$,

$$\mu(g\{e\}) = \mu(\{e\}),$$

où $e$ est l'élément neutre de $G$, i.e.

$$\mu(\{g\}) = \mu(\{e\}).$$

La mesure $\mu$ est donc entièrement déterminée par la valeur de $\mu(\{e\})$. De plus, réciproquement, une mesure qui vérifie cela est clairement invariante à gauche. En effet, pour tous $g, g_1, \ldots, g_n \in G$, avec $g_1, \ldots, g_n$ deux à deux distincts,

$$\mu(g\{g_1, \ldots, g_n\}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{gg_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu(\{gg_i\}) = n\mu(\{e\}) = \mu(\{g_1, \ldots, g_n\}).$$

Les mesures non nulles invariantes à gauche sur un groupe fini sont donc égales à un facteur strictement positif près, qui dépend du choix de la mesure de $\{e\}$. On va voir que cette égalité à un facteur près est valable sur tout groupe localement compact. Par contre, la mesure n'est pas forcément déterminée par le choix de la mesure de $\{e\}$ mais plutôt par celle de $G$ puisque, si la mesure est bornée et le groupe infini, la mesure de $\{e\}$ est alors nécessairement nulle.

### 1.1.2 Théorème général d'existence

**Théorème 1.1.** *Soit $G$ un groupe localement compact. Alors, il existe une mesure non nulle invariante à gauche. De plus, elle est unique à un facteur multiplicatif strictement positif près.*

On ne démontrera pas ce théorème, que nous n'utiliserons d'ailleurs pas. En effet, la mesure de Haar qui va nous intéresser est celle sur $SU_2$, dont on peut obtenir une expression. Nous n'aurons donc pas besoin de ce théorème très général d'existence, dont une démonstration dans le cas d'un groupe de Lie linéaire peut être trouvée dans le livre de Faraut [2], pages 91 à 93. Pour une démonstration dans le cas d'un groupe compact, on pourra se reporter au livre de Mneimné et Testard [4]§ 3.6

## 1.2 Algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$

**Définition 1.3.**
- *Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe fermé d'un groupe linéaire de la forme $GL_n(\mathbb{R})$ pour $n$ entier naturel.*
- *Soit $G$ un groupe de Lie linéaire. On lui associe son algèbre de Lie, qui est l'ensemble*

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) / \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

*Remarque* : Un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie linéaire car $GL_n(\mathbb{C})$ peut-être vu comme un sous-groupe fermé de $GL_{2n}(\mathbb{R})$. En effet, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, $(e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors, à une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$, qui correspond à un $\mathbb{C}$-automorphisme de $\mathbb{C}^n$, on peut associer la matrice de cet automorphisme dans la base précédente de $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, qui sera dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$. De plus, cette injection de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$ réalise $GL_n(\mathbb{C})$ comme un sous-groupe fermé de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire possède les propriétés données dans le théorème suivant :

**Théorème 1.2.** *L'ensemble $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel réel de $M_n(\mathbb{R})$ et, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a $[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$.*

*Démonstration.* On ne la fera pas ici, elle peut être trouvée dans le livre de Faraut [2], page 41. □

Plus généralement, une algèbre de Lie est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (on parle alors d'algèbre de Lie réelle) ou sur $\mathbb{C}$ (complexe dans ce cas), muni d'une application bilinéaire :

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X,Y) & \longmapsto [X,Y] \end{array}$$

antisymétrique et telle que

$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}, [X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]].$$

Cette relation est appelée l'identité de Jacobi.

**Exemples :**

- L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ muni de $(X,Y)\longmapsto [X,Y]=XY-YX$ est une algèbre de Lie. Cet espace est alors noté $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.
- Si $G$ est un groupe de Lie linéaire (donc sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$), alors l'ensemble $\mathfrak{g}$ défini précédemment est une sous-algèbre de Lie de $M_n(\mathbb{R})$.
- L'algèbre de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ est $M_n(\mathbb{R})$.
- L'algèbre de Lie de $SL_n(\mathbb{C})$ est $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})=\{X\in M_n(\mathbb{C})/\operatorname{tr}(X)=0\}$.
  Démontrons ceci :

  $$\begin{array}{ll} X\in\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) & \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, \det(\exp(tX))=1 \\ & \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, e^{t\cdot\operatorname{tr}(X)}=1 \\ & \Leftrightarrow \operatorname{tr}(X)=0 \end{array}$$

  D'où l'expression annoncée pour $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- L'algèbre de Lie de $SU_2$ est $\mathfrak{su}_2=\{X\in M_2(\mathbb{C})/{}^t\overline{X}+X=0 \text{ et } \operatorname{tr}(X)=0\}=\left\{\begin{bmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia\end{bmatrix}; a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

## 1.3 Représentations

On va maintenant pouvoir définir la notion de représentation d'un groupe topologique, ainsi que celle de représentation d'une algèbre de Lie. On fera ensuite le lien entre les deux grâce à la notion de représentation dérivée, qui nous sera très utile lorsque nous nous intéresserons aux représentations irréductibles de $SU_2$.

### 1.3.1 Premières définitions sur les représentations

**Définition 1.4.** – *Soient $G$ un groupe topologique et $V$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une représentation de $G$ dans $V$ est un morphisme continu de groupes*

$$\pi : G \longrightarrow GL(V).$$

- *Un sous-espace vectoriel $W$ de $V$ est dit invariant si, pour tout $g \in G$, $\pi(g)W = W$. Dans ce cas, $g \longmapsto \pi(g)|_W$ est une représentation de $G$ dans $W$. On dit que c'est une sous-représentation de $\pi$.*
- *La représentation $\pi$ est dite irréductible si ses seuls sous-espaces invariants sont $\{0\}$ et $V$.*
- *Soient $\pi_1$ et $\pi_2$ deux représentations de $G$ respectivement dans $V_1$ et $V_2$. On dit qu'un morphisme d'espaces vectoriels $A : V_1 \longrightarrow V_2$ est un opérateur d'entrelacement, ou morphisme de représentations (on dit aussi que $A$ entrelace les représentations $\pi_1$ et $\pi_2$) lorsque*

$$\forall g \in G, A\pi_1(g) = \pi_2(g)A.$$

*Quand il existe un isomorphisme vérifiant cela, les représentations $\pi_1$ et $\pi_2$ sont dites équivalentes.*

On parlera aussi dans la suite d'autres objets provenant d'une représentation : les coefficients matriciels. Ceux des représentations de $SU_2$ nous permettront plus tard de faire apparaître les polynômes de Jacobi.

**Définition 1.5.** – *Soit $\pi$ une représentation d'un groupe $G$ dans un espace vectoriel de dimension finie $V$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $V$. Alors, pour tout $g \in G$, l'application linéaire $\pi(g)$ possède une matrice $(\pi_{i,j}(g))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans cette base, c'est-à-dire que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\pi(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_{i,j}(g)e_i.$$

*Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\pi_{i,j}$ est une fonction définie sur $G$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, selon si $V$ est un espace vectoriel réel ou complexe. Les $\pi_{i,j}$ sont appelés les coefficients matriciels (relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$) de la représentation $\pi$.*

- *Si $l \in V^*$ et $v \in V$, on appelle également coefficient matriciel (généralisé) la fonction*

$$g \longmapsto l(\pi(g)v).$$

*Cette fonction est une combinaison linéaire des $\pi_{i,j}$, et ce quelle que soit la base $(e_1, \dots, e_n)$ choisie.*

Nous allons donner une dernière définition dans ce paragraphe : celle d'une représentation unitaire.

**Définition 1.6.** *Soient $G$ un groupe et $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit hermitien $\langle .,. \rangle$. Une représentation $\pi$ de $G$ sur $V$ est dite unitaire si, pour tout $g \in G$, $\pi(g)$ est un opérateur unitaire sur $V$, c'est-à-dire si*

$$\forall v, w \in V, \forall g \in G, \langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

**Remarque :** Reprenons les notations de la définition. Soit de plus $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $V$. Notons $(\pi_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ les coefficients matriciels de $\pi$ dans cette base. Alors, $\pi$ est unitaire si seulement si la matrice $(\pi_{i,j}(g))_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ est unitaire pour tout $g \in G$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $g \in G$, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}$, $\overline{\pi_{i,j}(g)} = \pi_{j,i}(g^{-1})$.
En effet, la première équivalence est triviale car $(\pi_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ est la matrice de $\pi(g)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, qui est orthonormale. La seconde équivalence est due au fait qu'une matrice $A$ est unitaire si $A^{-1} = {}^t\overline{A}$ et que, pour tout $g \in G$, $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$, ce qui se traduit par la même égalité au niveau des matrices associées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

### 1.3.2 Représentation dérivée

**Définition 1.7.** *Une représentation d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel $V$ est une application linéaire $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$ qui est un morphisme d'algèbre de Lie, c'est-à-dire que*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X).$$

*Remarque* : on peut énoncer une définition de l'équivalence entre deux représentations d'une algèbre de Lie tout à fait analogue à celle énoncée pour deux représentations d'un groupe topologique.

Voyons à présent comment on peut passer d'une représentation d'un groupe de Lie linéaire à une représentation de son algèbre de Lie, ce qui nous sera très utile au moment de déterminer toutes les représentations irréductibles de $SU_2$. Cela nécessite tout d'abord un résultat sur les sous-groupes à un paramètre d'un groupe topologique.

**Définition 1.8.** *Soit $G$ un groupe topologique. Un sous-groupe à un paramètre de $G$ est un morphisme continu de groupes :*

$$\gamma : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G.$$

**Théorème 1.3.** *Soit $\gamma$ un sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors, $\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \exp(tA)$$

*où $A = \gamma'(0)$.*

*Démonstration.* On ne la fera pas ici, elle peut être trouvée dans le livre de Faraut [2], page 40. □

On peut maintenant introduire la notion de représentation dérivée. Soient $G$ un groupe de Lie linéaire d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $V$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\pi$ une représentation continue de $G$ dans $V$.
Alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\gamma_X : t \longmapsto \pi(\exp(tX))$ est un sous-groupe à un paramètre de $GL(V)$, et donc dérivable d'après le théorème précédent.

**Définition 1.9.** *On pose*

$$d\pi : \begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & End(V) \\ X & \longmapsto & \gamma_X'(0) \end{array}.$$

*La représentation $d\pi$ (nous allons montrer que c'en est une) est appelée la représentation dérivée de $\pi$.*

Montrons que $d\pi$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $V$ :
Par le théorème énoncé sur les sous-groupes à un paramètre, on a,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \pi(\exp(X)) = \exp(d\pi(X)).$$

D'après la définition de $d\pi$, on a, pour tous $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$, $d\pi(tX) = td\pi(X)$.
De plus, on a, d'après le corollaire II-2.4 de Faraut [2],

$$\begin{aligned} \pi(\exp t(X+Y)) &= \lim_{k\to\infty} \left( \pi \left( \exp \frac{tX}{k} \right) \pi \left( \exp \frac{tY}{k} \right) \right)^k \\ &= \lim_{k\to\infty} \left( \exp \frac{d\pi(tX)}{k} \exp \frac{d\pi(tY)}{k} \right)^k \\ &= \exp(d\pi(tX) + d\pi(tY)) \\ &= \exp(td\pi(X) + td\pi(Y)) \end{aligned}$$

Ce qui donne, en dérivant en $t = 0$ :

$$d\pi(X+Y) = d\pi(X) + d\pi(Y).$$

Enfin,

$$\pi(\exp(tgYg^{-1})) = \pi(g)\pi(\exp tY)\pi(g^{-1}).$$

D'où, en dérivant en $t = 0$ :

$$d\pi(gYg^{-1}) = \pi(g)d\pi(Y)\pi(g^{-1}).$$

Et, en posant $g = \exp sX$ et en dérivant en $s = 0$ :

$$d\pi([X,Y]) = d\pi(X)d\pi(Y) - d\pi(Y)d\pi(X).$$

Ainsi, $d\pi$ est bien un morphisme d'algèbres de Lie, et donc une représentation.

### 1.3.3 Lemme de Schur

Nous allons à présent citer un résultat qui est assez rapide à obtenir et qui nous permettra de démontrer, au paragraphe suivant, les relations d'orthogonalité de Schur.

**Théorème 1.4.** *(Lemme de Schur)*
*(i) Soient $\pi_1$ et $\pi_2$ deux représentations irréductibles d'un groupe topologique $G$ respectivement dans $V_1$ et $V_2$, deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $A : V_1 \longrightarrow V_2$ une application linéaire qui entrelace les représentations $\pi_1$ et $\pi_2$, c'est-à-dire que*

$$\forall g \in G, A\pi_1(g) = \pi_2(g)A.$$

*Alors, $A = 0$ ou est un isomorphisme.*
*(ii) Soit $\pi$ une représentation irréductible $\mathbb{C}$-linéaire d'un groupe topologique $G$ dans un espace vectoriel complexe $V$ de dimension finie. Soit $A$ un endomorphisme de $V$ qui commute avec la représentation $\pi$, c'est-à-dire que*

$$\forall g \in G, A\pi(g) = \pi(g)A.$$

*Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I$ (où $I$ désigne l'identité de $V$).*

*Démonstration.* (i) Soient $g \in G, x \in \ker(A)$. Alors,

$$A(\pi_1(g)x) = \pi_2(g)(Ax) = \pi_2(g)(0) = 0 \text{ (car } \pi_2(g) \text{ est un endomorphisme de } V)$$

Donc $\pi_1(g)x \in \ker(A)$, i.e. $\ker(A)$ est un sous-espace invariant de $\pi_1$, qui est irréductible. Ainsi, $\ker(A) = \{0\}$ ou $V_1$.
De même, on montre que $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace invariant de $\pi_2$, et donc que $\mathrm{Im}(A) = \{0\}$ ou $V_2$.
On en déduit que $A = 0$ ou $A$ est un isomorphisme.
(ii) $A$ possède au moins une valeur propre complexe (son polynôme caractéristique possède une racine sur $\mathbb{C}$), notée $\lambda$. Alors, $A - \lambda I$ n'est pas un isomorphisme. Or, $A - \lambda I$ commute avec la représentation $\pi$ (car c'est le cas pour $A$ et pour $I$), donc, en appliquant le (i), et comme $A - \lambda I$ n'est pas un isomorphisme, on a $A - \lambda I = 0$, i.e. $A = \lambda I$. □

### 1.3.4 Relations d'orthogonalité de Schur

Nous allons à présent pouvoir énoncer, puis démontrer (à l'aide du lemme de Schur) les relations d'orthogonalité de Schur. Celles-ci nous seront utiles dans le paragraphe faisant le lien entre les coefficients matriciels d'une certaine représentation et les polynômes de Jacobi, afin de donner une preuve, issue de la théorie des représentations, de l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

**Théorème 1.5.** *Soit $\pi$ une représentation $\mathbb{C}$-linéaire unitaire irréductible d'un groupe compact $G$ dans un espace hermitien $H$ de dimension $d$. On note $\mu$ la mesure de Haar normalisée (i.e. telle que $\mu(G) = 1$) de $G$. Alors, pour tous $u, v \in H$,*

$$\int_G |\langle \pi(g)u|v\rangle|^2 \mu(dg) = \frac{1}{d}\|u\|^2\|v\|^2$$

*et, pour tous $u, v, u', v' \in H$,*

$$\int_G \langle \pi(g)u|v\rangle \overline{\langle \pi(g)u'|v'\rangle} \mu(dg) = \frac{1}{d}\langle u|u'\rangle \overline{\langle v|v'\rangle}.$$

*Démonstration.* Soit $v \in H$. On pose l'opérateur $K_v$ de $H$ défini par :

$$\begin{array}{rccl} K_v : & H & \longrightarrow & H \\ & w & \longmapsto & \displaystyle\int_G \langle w|\pi(g)v\rangle \pi(g)v \; \mu(dg) \end{array}$$

Alors, $K_v$ commute avec la représentation $\pi$. En effet, pour tout $w \in H$, pour tout $g_0 \in G$,

$$\begin{aligned} K_v(\pi(g_0)w) &= \int_G \langle \pi(g_0)w|\pi(g)v\rangle \pi(g)v \; \mu(dg) \\ &= \int_G \langle w|\pi(g_0^{-1}g)v\rangle \pi(g)v \; \mu(dg) \text{ (car } \pi \text{ est unitaire)} \\ &= \int_G \langle w|\pi(g)v\rangle \pi(g_0g)v \; \mu(dg) \text{ (par invariance de } \mu) \\ &= \pi(g_0)K_v(w). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme de Schur, il existe $\lambda(v) \in \mathbb{C}$ tel que $K_v = \lambda(v)I$ ($I$ désigne l'identité de $H$). On a donc, pour tout $u \in H$,

$$\begin{aligned} \langle K_v(u)|u\rangle &= \langle \int_G \langle u|\pi(g)v\rangle \pi(g)v \; \mu(dg)|u\rangle \\ &= \int_G \overline{\langle \pi(g)v|u\rangle} \langle \pi(g)v|u\rangle \; \mu(dg) \\ &= \int_G |\langle \pi(g)v|u\rangle|^2 \; \mu(dg) \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\langle K_v(u)|u\rangle = \lambda(v)\langle u|u\rangle = \lambda(v)\|u\|^2.$$

En échangeant les rôles de $u$ et $v$ (et grâce à l'invariance de $\mu$), on obtient ainsi :

$$\forall u, v \in H, \lambda(u)\|v\|^2 = \lambda(v)\|u\|^2,$$

donc $u \mapsto \dfrac{\lambda(u)}{\|u\|^2}$ (pour $u \neq 0_H$) est constante et il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda(u) = \lambda_0\|u\|^2$ pour tout $u \in H$ (on a $\lambda(0_H) = 0$).

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormale de $H$. On a alors, pour tout $u \in H$, pour tout $g \in G$,

$$\sum_{i=1}^{d} |\langle \pi(g)u|e_i\rangle|^2 = \|\pi(g)u\|^2 = \|u\|^2 \text{ (car } \pi \text{ est unitaire).}$$

On intègre cette égalité sur $G$. Comme $\mu$ est normalisée,

$$\forall u \in H, \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \int_G |\langle \pi(g)u|e_i\rangle|^2 \mu(dg) = d\lambda_0 \|u\|^2.$$

On en déduit que $\lambda_0 = \frac{1}{d}$. Finalement, on peut conclure :

$$\forall u, v \in H, \int_G |\langle \pi(g)u|v\rangle|^2 \mu(dg) = \frac{1}{d}\|u\|^2\|v\|^2.$$

La seconde égalité annoncée se déduit de celle-ci par polarisation. □

Enfin, on peut obtenir, à partir du lemme de Schur, un autre résultat qui concerne cette fois deux représentations non équivalentes d'un même groupe :

**Théorème 1.6.** *Soient $\pi$ et $\pi'$ deux représentations unitaires et irréductibles mais non équivalentes d'un groupe compact $G$ dans deux espaces hermitiens $H$ et $H'$. Alors, pour tous $u, v \in H, u', v' \in H'$,*

$$\int_G \langle \pi(g)u|v\rangle \overline{\langle \pi'(g)u'|v'\rangle} \mu(dg) = 0$$

*Démonstration.* Soit $A : H \longrightarrow H'$ une application linéaire. On pose :

$$A_1 = \int_G \pi'(g^{-1}) A \pi(g) \mu(dg).$$

L'application $A_1 : H \longrightarrow H'$ est alors linéaire. De plus, pour tout $g_0 \in G$,

$$\begin{array}{ll} A_1 \circ \pi(g_0) & = \int_G \pi'(g^{-1}) A \pi(g g_0) \mu(dg) \\ & = \int_G \pi'((g g_0^{-1})^{-1}) A \pi(g) \mu(dg) \\ & = \int_G \pi'(g_0 g^{-1}) A \pi(g) \mu(dg) \\ & = \pi'(g_0) \circ A_1 \end{array}.$$

L'application linéaire $A_1$ entrelace donc les représentations $\pi$ et $\pi'$. Ainsi, par le lemme de Schur, comme $A_1$ ne peut être un isomorphisme ($\pi$ et $\pi'$ n'étant pas équivalentes), $A_1 = 0$. Donc, pour tous $u \in H, u' \in H'$,

$$\int_G \langle \pi'(g^{-1}) A \pi(g) u|u'\rangle \mu(dg) = \langle A_1(u)|u'\rangle = 0$$

i.e.

$$\int_G \langle A\pi(g)u|\pi'(g)u'\rangle \mu(dg) = 0.$$

Soient $v \in H, v' \in H'$. Appliquons ceci pour $A : u \mapsto \langle u|v\rangle v'$ : pour tout $g \in G$, pour tout $u \in H$, $A\pi(g)u = \langle \pi(g)u|v\rangle v'$ et donc, pour tous $u \in H, u' \in H'$,

$$\int_G \langle \pi(g)u|v\rangle \overline{\langle \pi'(g)u'|v'\rangle} \mu(dg) = 0.$$

□

### 1.3.5 Théorèmes de Peter-Weyl et de Plancherel

On va maintenant ajouter deux nouveaux résultats sur les représentations de groupes compacts : le théorème de Peter-Weyl et celui de Plancherel.

**Théorème 1.7.** *(Peter-Weyl) Soit $G$ un groupe compact. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de $G$. Pour tout $\lambda \in \widehat{G}$, soit $\mathcal{M}_\lambda$ l'espace vectoriel engendré par les coefficients (qui sont des applications $G \longrightarrow \mathbb{C}$) d'une représentation quelconque de la classe d'équivalence $\lambda$. On a alors :*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}}} \mathcal{M}_\lambda,$$

*où $\widehat{\bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}}} \mathcal{M}_\lambda$ est l'adhérence dans $L^2(G)$ de*

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} \mathcal{M}_\lambda,$$

*qui est l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies de coefficients de représentations unitaires irréductibles de $G$.*

*Démonstration.* Par le théorème 1.6., les sous-espaces $\mathcal{M}_\lambda$ sont deux à deux orthogonaux. Il nous reste à montrer que l'adhérence de $\mathcal{M}$ est bien tout $L^2(G)$. Pour cela, on note

$$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}}} \mathcal{M}_\lambda \text{ et } \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}^\perp$$

($\mathcal{H}_0$ est alors fermé), et on veut montrer que $\mathcal{H}_0 = \{0\}$.
Montrons le par l'absurde : on suppose que $\mathcal{H}_0 \neq \{0\}$. Posons la représentation $R$ de $G$ dans $L^2(G)$, définie par :

$$\forall g \in G, \forall f \in L^2(G), R(g)f : x \longmapsto f(xg).$$

L'espace $\mathcal{H}_0$ est alors invariant par cette représentation. En effet, si $f \in \mathcal{H}_0$, alors, pour tout $g_0 \in G$, pour tout $c$, coefficient matriciel de représentation unitaire et irréductible de $G$ (donc élément d'un $\mathcal{M}_\lambda$),

$$\int_G (R(g_0)f)(g)\overline{c(g)}\mu(dg) = \int_G f(g)\overline{c(gg_0^{-1})}\mu(dg) = \int_G f(g)\overline{c(g)}\mu(dg)\overline{c(g_0^{-1})} = 0$$

donc, par combinaison linéaire (finie) puis en passant à l'adhérence, $\langle R(g_0)f|h\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et donc $R(g_0)f \in \mathcal{H}_0$.
Ainsi, en utilisant le théorème VI-3.2. de Faraut [2], $\mathcal{H}_0$ contient un sous-espace fermé $\mathcal{H}_1 \neq \{0\}$ de dimension finie [1], invariant par $R$ et irréductible. La restriction de $R$ à $\mathcal{H}_1$ étant irréductible, elle appartient à l'une des classes : $\lambda$. Soit $f \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\}$. On pose

$$F : g \longmapsto \langle R(g)f|f\rangle.$$

Comme $f \in \mathcal{H}_1$, on a alors $F \in \mathcal{M}_\lambda$. Montrons que $F$ est également orthogonale à $\mathcal{M}_\lambda$ : Soient $(\pi, V)$ une représentation de la classe $\lambda$ et $u, v \in V$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_G F(g)\overline{\langle\pi(g)u|v\rangle}\mu(dg) \quad &= \int_G\int_G f(xg)\overline{f(x)\langle\pi(g)u|v\rangle}\mu(dg)\mu(dx)\\ &= \int_G \overline{f(x)}\left(\int_G f(g')\overline{\langle\pi(g')u|\pi(x)v\rangle}\mu(dg')\right)\mu(dx)\\ &\text{(en posant } g' = xg \text{ et car } \pi(x) \text{ est unitaire pour tout } x \in G)\\ &= 0 \text{ (car } f \in \mathcal{H}_0 \text{ et donc est orthogonale à tout coefficient}\\ &\text{de la représentation } \pi)\end{aligned}$$

Ainsi $F$ est orthogonale à $\mathcal{M}_\lambda$ et donc $F = 0$. Or,

$$F(e) = \int_G |f(x)|^2\mu(dx),$$

donc $f = 0$. Absurde.
D'où $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{H} = L^2(G)$. □

Enfin, pour conclure cette partie de généralités, énonçons un dernier résultat, qui est une conséquence directe du théorème de Peter-Weyl et des relations d'orthogonalité de Schur.

Définissons tout d'abord une norme (appelée norme de Hilbert-Schmidt) sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de dimension finie : si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ a pour matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{H}$, on pose

$$|||A|||^2 = \mathrm{tr}(AA^*) = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2.$$

1. L'idée est que, dans une représentation d'un groupe compact, un vecteur non nul engendre une sous-représentation de dimension finie. Cela se montre à l'aide de la notion d'opérateur compact.

On reprend à présent les hypothèses et les notations du théorème de Peter-Weyl énoncé précédemment et, pour tout $\lambda \in \widehat{G}$, on choisit un représentant $(\pi_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$. On note également $d_\lambda$ la dimension de $\mathcal{H}_\lambda$ et on définit, si $f$ est une fonction intégrable sur $G$, son coefficient de Fourier comme étant l'opérateur de l'espace $\mathcal{H}_\lambda$

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(g)\pi_\lambda(g^{-1})\mu(dg).$$

**Théorème 1.8.** *(Plancherel) Soit $f \in L^2(G)$. Alors, $f$ est égale à la somme de sa série de Fourier :*

$$\forall g \in G, f(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda \operatorname{tr}(\widehat{f}(\lambda)\pi_\lambda(g)),$$

*la convergence ayant lieu au sens de $L^2$ (en moyenne quadratique).*
*De plus,*

$$\int_G |f(g)|^2 \mu(dg) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda |||\widehat{f}(\lambda)|||^2.$$

# 2 Représentations de $SU_2$ et polynômes de Jacobi

Après cette première partie de généralités, nous allons pouvoir appliquer les notions exposées au cas d'un groupe particulier, qui est $SU_2$. Rappelons-en la définition : il s'agit du sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices $g$ telles que ${}^t\overline{g}.g = Id$ et $\det g = 1$. On vérifie sans difficulté que ce sont les matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
Il n'est pas non plus compliqué de voir que le groupe $SU_2$ est compact : par l'expression qui précède des éléments de ce groupe, $SU_2$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{C}^2$, donc à celle de $\mathbb{R}^4$ : $S^3$. D'où la compacité.

## 2.1 Mesure de Haar sur $SU_2$

On aura besoin, dans la partie sur les polynômes de Jacobi, d'une expression explicite de la mesure de Haar sur $SU_2$. On va pour cela utiliser ce que l'on vient de voir : le fait que $SU_2$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{C}^2$, et donc à $S^3$, la sphère unité de $\mathbb{R}^4$. Par cet homéomorphisme, une multiplication à gauche par un élément fixé de $SU_2$ correspond à une rotation de $S^3$ (par rotation en dimension 4, on veut simplement dire un élément de $SO_4$ ; cela se vérifie sans problème par un calcul). Ainsi, pour obtenir la mesure de Haar sur $SU_2$, il nous faut une mesure invariante par rotation sur $S^3$, que l'on normalisera ensuite.

Une telle mesure $\omega$ vérifie, pour toute fonction $f$ continue et à support compact sur $\mathbb{R}^4$, et en notant $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$ :

$$\int_{\mathbb{R}^4} f d\lambda = \int_0^\infty \left( \int_{S^3} f(r\xi) d\omega(\xi) \right) r^3 dr.$$

Utilisons à présent les coordonnées suivantes sur $\mathbb{R}^4$ :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta \cos\psi, r \cos\theta \sin\psi),$$

où $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$. On remarque que, si $r = 1$, $x_1 + ix_2 = \sin\theta e^{i\varphi}$ et $x_3 + ix_4 = \cos\theta e^{i\psi}$. Cela montre que ces coordonnées correspondent simplement à prendre les coordonnées $(\sin\theta e^{i\varphi}, \cos\theta e^{i\psi})$ sur la sphère unité de $\mathbb{C}^2$.

On obtient alors, avec ce changement de variables :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\
&= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\psi, r\cos\theta\sin\psi) \\
&\quad \times r^3 \sin\theta\cos\theta dr d\theta d\varphi d\psi.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne, pour toute fonction F continue sur la sphère unité de $\mathbb{C}^2$,

$$\int_{\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2/|z_1|^2+|z_2|^2=1\}} F d\omega = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F(\sin\theta e^{i\varphi}, \cos\theta e^{i\psi}) \sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Et donc, via l'homéomorphisme entre cette sphère unité et $SU_2$, et en normalisant (i.e. de manière à ce que la mesure de $SU_2$ soit 1), la mesure de Haar $\mu$ sur $SU_2$ vérifie, pour toute fonction $f$ continue sur $SU_2$,

$$\int_{SU_2} f d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} f\left(\begin{bmatrix} \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta e^{-i\psi} \\ \cos\theta e^{i\psi} & \sin\theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix}\right) \sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi d\psi.$$

C'est cette expression que nous utiliserons lors du paragraphe 2.4.4.

## 2.2 Représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Notre but est maintenant d'obtenir les représentations irréductibles de dimension finie du groupe $SU_2$. On va d'abord s'intéresser à l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et aux représentations irréductibles de celle-ci. La raison en est que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}_2$, c'est-à-dire que tout élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ s'écrit, et ce de manière unique, $X + iY$, où $X, Y \in \mathfrak{su}_2$ (ce qui revient à dire que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{su}_2$ est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$).

### 2.2.1 Des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans un espace de polynômes

Soit $m$ entier supérieur ou égal à 1. On va définir une représentation de $SL_2(\mathbb{C})$ dans l'ensemble des polynômes de deux variables $X$ et $Y$ à coefficients complexes homogènes de degré $m$. Il s'agit de l'ensemble

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{k=0}^{m} a_k X^k Y^{m-k}, a_0, ..., a_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cet ensemble est un espace vectoriel de dimension $m + 1$. Dans ce qui suit on confondra polynôme et fonction polynomiale associée, et tout élément de $\mathcal{P}_m$ pourra donc être vu comme une fonction $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$.

Le groupe $SL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathcal{P}_m$ : si on identifie $\mathbb{C}^2$ avec $M_{1,2}(\mathbb{C})$ et que l'on fait agir $SL_2(\mathbb{C})$ à droite sur $\mathbb{C}^2$ par

$$\forall g \in SL_2(\mathbb{C}), \forall v \in \mathbb{C}^2, g.v = vg,$$

on en déduit une action à gauche de $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{P}_m$ par,

$$\forall f \in \mathcal{P}_m, \forall g \in SL_2(\mathbb{C}), \forall v \in \mathbb{C}^2, g.f(v) = f(vg).$$

Cette action nous donne un morphisme (et donc une représentation)

$$\pi_m : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathcal{P}_m)$$

tel que, pour tout $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{array}{rll} \pi_m(g) : & \mathcal{P}_m & \longrightarrow \mathcal{P}_m \\ & f & \longmapsto ((u,v) \longmapsto f(au+cv, bu+dv)) \end{array}$$

c'est-à-dire que, pour tous $f \in \mathcal{P}_m$, $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $(\pi_m(g)f)(u,v) = f(au+cv, bu+dv)$.

L'objectif étant d'étudier la représentation dérivée de $\pi_m$ (notée $\rho_m$) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{P}_m$, nous allons utiliser la base suivante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que ces trois matrices vérifient :

$$[H,E] = 2E,\ [H,F] = -2F, \text{ et } [E,F] = H.$$

Donnons également une base de $\mathcal{P}_m$, qui nous sera utile par la suite : $\mathcal{B} = (P_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$, où, $\forall i \in \{0,...,m\}, P_i = X^i Y^{m-i}$.

Il suffit de calculer $\rho_m(E)$, $\rho_m(F)$ et $\rho_m(H)$ pour connaître $\rho_m$. On rappelle que $\rho_m = d\pi_m : X \longmapsto \gamma'_X(0)$, où $\gamma_X : t \longmapsto \pi_m(\exp(tX))$.
Calcul pour $H$ :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{P}_m, \forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, (\pi_m(\exp tH)f)(u,v) &= (\pi_m(\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix})f)(u,v) \\ &= f(e^t u, e^{-t} v) \end{aligned}$$

La dérivée de cette dernière expression par rapport à $t$ est :

$$e^t u \frac{\partial f}{\partial u}(e^t u, e^{-t} v) - e^{-t} v \frac{\partial f}{\partial v}(e^t u, e^{-t} v)$$

et donc, en $t=0$ :

$$(\rho_m(H)f)(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - v\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Déterminons maintenant la matrice de $\rho_m(H)$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_m$ :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0,...,m\}, \forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, (\rho_m(H)P_i)(u,v) &= uiu^{i-1}v^{m-i} - v(m-i)u^i v^{m-i-1} \\ &= (2i-m)P_i(u,v) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall i \in \{0,...m\}, \rho_m(H)P_i = (2i-m)P_i$ et on en déduit la matrice de $\rho_m(H)$ dans la base $\mathcal{B}$ :

$$\begin{bmatrix} -m & & & & \\ & 2-m & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & m-2 & \\ & & & & m \end{bmatrix}.$$

Calcul pour $E$ :

Cette fois, on a $E^2 = (0)$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tE) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. D'où :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{P}_m, \forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, (\pi_m(\exp tE)f)(u,v) &= (\pi_m(\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix})f)(u,v) \\ &= f(u, tu+v) \end{aligned}.$$

Ce qui donne, en dérivant en $t=0$ :

$$(\rho_m(E)f)(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Pour obtenir la matrice de $\rho_m(E)$, on calcule $\rho_m(E)P_i$ pour $i \in \{0,...,m\}$ :
$\forall i \in \{0,...,m-1\}, (\rho_m(E)P_i)(u,v) = u(m-i)u^i v^{m-i-1} = (m-i)P_{i+1}(u,v)$ donc $\rho_m(E)P_i = (m-i)P_{i+1}$. De plus, $\rho_m(E)P_m = 0$.
On en déduit la matrice de $\rho_m(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ m & 0 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & 2 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcul pour $F$ :

Cette fois, $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tF) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$, donc,

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{P}_m, \forall (u,v) \in \mathbb{C}^2, (\pi_m(\exp tF)f)(u,v) = f(u+tv,v)$ et :

$$(\rho_m(F)f)(u,v) = v\frac{\partial f}{\partial u}(u,v).$$

Ainsi, $\forall i \in \{1,...,m\}, (\rho_m(F)P_i)(u,v) = viu^{i-1}v^{m-i} = iP_{i-1}(u,v)$ donc $\rho_m(F)P_i = iP_{i-1}$. De plus, $\rho_m(F)P_0 = 0$.
On en déduit la matrice de $\rho_m(F)$ dans la base $\mathcal{B}$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 0 & m \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

**Proposition 2.1.** *La représentation $\rho_m$ est irréductible.*

*Démonstration.* Pour le montrer, prenons $W$ un sous-espace invariant de $\mathcal{P}_m$ non réduit à zéro. Il s'agit de montrer que $W = \mathcal{P}_m$. L'application $\rho_m(H) \in GL(\mathcal{P}_m)$ et on a $\rho_m(H)W = W$ car $W$ est invariant. De plus, on a vu que $\rho_m(H)$ était diagonalisable (car sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale), donc sa restriction à $W$ l'est également, et donc cette restriction admet au moins une valeur propre.
Ainsi, $W$ contient au moins un sous-espace propre de $\rho_m(H)$. Ces sous-espaces propres étant dirigés par les $P_i$, il existe $i \in [\![0,m]\!]$ tel que $P_i \in W$. Mais $W$ est aussi stable par $\rho_m(F)$, donc, si $i > 0$, $P_{i-1} = \frac{1}{i}\rho_m(F)P_i \in W$ et donc, par récurrence (finie), $\forall j < i$, $P_j \in W$. De même, $W$ est stable par $\rho_m(E)$ donc, si $i < m$, $P_{i+1} = \frac{1}{m-i}\rho_m(E)P_i \in W$ et donc, $\forall j > i$, $P_j \in W$.
Ainsi, $W$ contient tous les $P_j$, qui forment une base de $\mathcal{P}_m$. Donc $W = \mathcal{P}_m$. $\square$

### 2.2.2 Les $\rho_m$ sont les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

On a donc construit une représentation irréductible $\rho_m$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{P}_m$. Il va maintenant s'agir de démontrer que ces $\rho_m$ ($m \geqslant 1$) sont les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

**Théorème 2.2.** *Toute représentation $\mathbb{C}$-linéaire irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est équivalente à l'une des représentations $\rho_m$.*

*Démonstration.* Soit $\rho$ une telle représentation, dans un espace vectoriel complexe de dimension finie noté $V$. Montrons qu'il existe $m \geqslant 1$ tel que $\rho$ est équivalente à $\rho_m$ :
$\rho(H)$ possède au moins une valeur propre (car $\rho(H) \in GL(V)$ et $V$ est un $\mathbb{C}$-espace

vectoriel, donc le polynôme caractéristique de $\rho(H)$ possède au moins une racine), et au plus $\dim(V)$. Soient $\lambda_0$ une valeur propre de $\rho(H)$ de partie réelle minimale et $\varphi_0$ un vecteur propre associé.
On va construire une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, si $\varphi_k$ n'est pas nul, alors c'est un vecteur propre de $\rho(H)$.
On pose, $\forall k \geqslant 1$, $\varphi_k = \rho(E)^k\varphi_0$. Montrons par récurrence que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(H)\varphi_k = (\lambda_0 + 2k)\varphi_k$ :

- pour $k = 0$ : on a $\rho(H)\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$ par définition de $\varphi_0$.
- soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose que $\rho(H)\varphi_k = (\lambda_0 + 2k)\varphi_k$. Alors,

$$\begin{aligned}
\rho(H)\varphi_{k+1} &= \rho(H)\rho(E)\varphi_k \\
&= \rho(E)\rho(H)\varphi_k + \rho([H,E])\varphi_k \\
&= (\lambda_0 + 2k)\rho(E)\varphi_k + 2\rho(E)\varphi_k \\
&= (\lambda_0 + 2(k+1))\varphi_{k+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien ce qui était annoncé pour la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En particulier, s'ils ne sont pas nuls, ces vecteurs sont linéairement indépendants (puisque vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes). Donc, comme $V$ est de dimension finie, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que, $\forall k \leqslant m$, $\varphi_k \neq 0$ et $\varphi_{m+1} = 0$.
On pose à présent $W$ le sous-espace de $V$ engendré par $\varphi_0, ..., \varphi_m$ (donc de dimension $m + 1$). Montrons que $W$ est un espace invariant :
Puisque $\rho$ est un morphisme et $(E, F, H)$ est une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que $W$ est stable par $\rho(E)$, $\rho(F)$ et $\rho(H)$. $\forall k \in [\![0, m]\!]$, on a $\rho(H)\varphi_k = (\lambda_0 + 2k)\varphi_k$ et $\rho(E)\varphi_k = \varphi_{k+1}$, donc $W$ est stable par $\rho(H)$ et $\rho(E)$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\rho(H)\rho(F)\varphi_0 &= \rho(F)\rho(H)\varphi_0 + \rho([H,F])\varphi_0 \\
&= \lambda_0\rho(F)\varphi_0 - 2\rho(F)\varphi_0 \\
&= (\lambda_0 - 2)\rho(F)\varphi_0.
\end{aligned}$$

Donc, si $\rho(F)\varphi_0 \neq 0$, alors c'est un vecteur propre de $\rho(H)$ associé à la valeur propre $\lambda_0 - 2$. Or, $\lambda_0$ est une valeur propre de $\rho(H)$ de partie réelle minimale, donc $\rho(F)\varphi_0 = 0$.
Montrons maintenant par récurrence que, $\forall k \geqslant 1$, $\rho(F)\varphi_k = -k(\lambda_0 + k - 1)\varphi_{k-1}$ :

- pour $k = 1$ :

$$\begin{aligned}
\rho(F)\varphi_1 &= \rho(F)\rho(E)\varphi_0 \\
&= \rho(E)\rho(F)\varphi_0 + \rho([F,E])\varphi_0 \\
&= -\rho(H)\varphi_0 \\
&= -\lambda_0.
\end{aligned}$$

- soit $k \geqslant 1$ quelconque fixé. On suppose que $\rho(F)\varphi_k = -k(\lambda_0 + k - 1)\varphi_{k-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\rho(F)\varphi_{k+1} &= \rho(F)\rho(E)\varphi_k \\
&= \rho(E)\rho(F)\varphi_k + \rho([F,E])\varphi_k \\
&= -k(\lambda_0 + k - 1)\rho(E)\varphi_{k-1} - \rho(H)\varphi_k \\
&= (-k(\lambda_0 + k - 1) - (\lambda_0 + 2k))\varphi_k \\
&= -(k+1)(\lambda_0 + k)\varphi_k.
\end{aligned}$$

Ainsi, $W$ est également stable par $\rho(F)$, et donc est bien invariant. Comme $\rho$ est irréductible, on a alors $W = V$.
Montrons de plus que $\lambda_0 = -m$ :
D'après ce que l'on vient de montrer sur $\rho(F)$, appliqué à $k = m+1$, on a :

$$\rho(F)\varphi_{m+1} = -(m+1)(\lambda_0 + m)\varphi_m$$

Or, par définition de $m$, $\varphi_{m+1} = 0$, donc $\rho(F)\varphi_{m+1} = 0$, et $\varphi_m \neq 0$. Ainsi, $(m+1)(\lambda_0 + m) = 0$, d'où $\lambda_0 = -m$.
On obtient donc au final :

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, \ldots, m\}, \quad & \rho(H)\varphi_k = (2k - m)\varphi_k \\ & \rho(E)\varphi_k = \varphi_{k+1} \\ & \rho(F)\varphi_k = k(m - k + 1)\varphi_{k-1} \text{ (et } \rho(F)\varphi_0 = 0). \end{aligned}$$

On pose à présent l'application linéaire $A : V \longrightarrow \mathcal{P}_m$ définie par, pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $A\varphi_k = c_k P_k$, où $c_0 = 1$ et $c_k = m(m-1)\ldots(m-k+1)$ si $1 \leqslant k \leqslant m$.
On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, \ldots, m\}, \quad A(\rho(H)\varphi_k) & = A((2k - m)\varphi_k) \\ & = c_k(2k - m)P_k \\ & = c_k \rho_m(H) P_k \\ & = \rho_m(H)(c_k P_k) \\ & = \rho_m(H)(A\varphi_k) \end{aligned}$$

De même, pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, on a

$$A(\rho(E)\varphi_k) = \rho_m(E)(A\varphi_k) \text{ et } A(\rho(F)\varphi_k) = \rho_m(F)(A\varphi_k).$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $A \circ \rho(X) = \rho_m(X) \circ A$, c'est-à-dire $A$ entrelace les représentations $\rho$ et $\rho_m$, qui sont donc équivalentes. □

## 2.3 Représentations irréductibles de dimension finie de $SU_2$

La restriction de la représentation $\pi_m$ (représentation de $SL_2(\mathbb{C})$) à $SU_2$ est une représentation irréductible de $SU_2$. En effet, si un sous-espace $W$ de $\mathcal{P}_m$ est invariant par $\pi_m$, alors il est aussi invariant par la représentation dérivée $\rho_m$. Or, cette dernière est irréductible comme représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, donc également comme représentation de $\mathfrak{su}_2$ (vu que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est la complexifiée de $\mathfrak{su}_2$, tout sous-espace stable par $\mathfrak{su}_2$ est, du fait de la linéarité de $\rho_m$, stable par $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$).Ainsi, le sous-espace $W$ est trivial.

On peut même donner à présent, grâce aux résultats précédents sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, un résultat général sur toutes les représentations irréductibles (de dimension finie) de $SU_2$.

**Théorème 2.3.** *Soit $\pi$ une représentation irréductible de $SU_2$ dans un espace vectoriel complexe $V$ de dimension finie. Alors, $\pi$ est équivalente à une des représentations $\pi_m$.*

*Démonstration.* La représentation $d\pi$ est une représentation de $\mathfrak{su}_2$ dans $V$. Elle s'étend par linéarité en une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $V$, que l'on va noter $\rho$ (on rappelle que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{su}_2$ est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$).
Montrons que cette représentation $\rho$ est irréductible :
Soit $W \neq \{0\}$ un sous-espace de $V$ invariant par $\rho$. Alors, si $X \in \mathfrak{su}_2$, $W$ est invariant par $\rho(X)$, et donc par $\exp \rho(X)$ (car $W$ est alors invariant par les puissances successives de $\rho(X)$ et $\exp \rho(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\rho(X))^k}{k!}$). Or, $\exp \rho(X) = \pi(\exp X)$ et, comme $SU_2$ est connexe, il est engendré par $\exp(\mathfrak{su}_2) = \{\exp Y; Y \in \mathfrak{su}_2\}$. Ainsi, $W$ est stable par $\{\pi(g); g \in SU_2\}$ et donc invariant par $\pi$, qui est irréductible. Finalement, $W = V$ et $\rho$ est irréductible.
Alors, par le théorème précédent (1.4), il existe $m \geqslant 1$ tel que $\rho$ est équivalente à la représentation $\rho_m$. C'est-à-dire qu'il existe $A : V \longrightarrow \mathcal{P}_m$ un isomorphisme tel que, pour tout $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$,

$$A \circ \rho(X) = \rho_m(X) \circ A.$$

C'est en particulier vrai pour tout élément de $\mathfrak{su}_2$ et donc, par linéarité et continuité des applications

$$\begin{array}{lll} GL(V) & \longrightarrow & \{\text{isomorphismes } V \longrightarrow \mathcal{P}_m\} \\ \varphi & \longmapsto & A \circ \varphi \end{array}$$

$$\text{et} \quad \begin{array}{lll} GL(\mathcal{P}_m) & \longrightarrow & \{\text{isomorphismes } V \longrightarrow \mathcal{P}_m\} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ A \end{array},$$

(et car $\exp \rho(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\rho(X))^k}{k!}$) on a, pour tout $X \in \mathfrak{su}_2$,

$$A \circ \exp \rho(X) = \exp \rho_m(X) \circ A, \text{ i.e. } A \circ \pi(\exp X) = \pi_m(\exp X) \circ A.$$

D'où, en utilisant à nouveau le fait que $\exp(\mathfrak{su}_2)$ engendre $SU_2$, pour tout $g \in SU_2$,

$$A \circ \pi(g) = \pi_m(g) \circ A.$$

Ainsi, $\pi$ et $\pi_m$ sont équivalentes. □

**Remarque :** Il est même possible de donner un résultat plus précis que celui-là : du fait de la compacité de $SU_2$, toute représentation irréductible de ce groupe est équivalente à l'une des représentations $\pi_m$ (voir théorème 3.2.(ii) de Faraut [2]). Cela provient d'un argument utilisé dans la preuve du théorème de Peter-Weyl : pour une représentation d'un groupe compact, un vecteur non nul engendre une sous-représentation de dimension finie.

## 2.4 Coefficients matriciels et polynômes de Jacobi

Nous allons maintenant calculer les coefficients matriciels des représentations $\pi_m$ étudiées précédemment (restreintes à $SU_2$) et voir que l'on peut trouver des relations intéressantes entre ces coefficients et les polynômes de Jacobi. Cela pourra nous permettre de montrer certaines propriétés des polynômes de Jacobi à l'aide des représentations.

### 2.4.1 Première expression des coefficients matriciels

Commençons par introduire quelques nouvelles notations par rapport aux parties précédentes.
On note toujours, lorsque

$$l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}\{0,1\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\},$$

$\mathcal{P}_{2l}$ l'espace vectoriel (de dimension $2l+1$) des polynômes homogènes de deux variables de degré $2l$. On introduit la base suivante de $\mathcal{P}_{2l}$ : $(e_{-l}, e_{-l+1}, \ldots, e_{l-1}, e_l)$, où, pour tout $n \in \{-l, -l+1, \ldots, l-1, l\}$,

$$e_n : (z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} z_1^{l-n} z_2^{l+n}.$$

On notera également à présent $\pi^l$ la représentation précédente (auparavant notée $\pi_{2l}$) dans l'espace $\mathcal{P}_{2l}$. On rappelle que, pour tous
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU_2$, $f \in \mathcal{P}_{2l}$,

$$\pi^l \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f : (z_1, z_2) \mapsto f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2).$$

Alors, en particulier, pour toute $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU_2$, pour tout $n \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$,

$$\pi^l \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_n : (z_1, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} (az_1 + cz_2)^{l-n} (bz_1 + dz_2)^{l+n}$$

Le coefficient matriciel en $m$-ème ligne et $n$-ème colonne, noté $\pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, est, dans l'expression qui précède, le coefficient devant le monôme $z_1^{l-m} z_2^{l+m}$, divisé par $\begin{pmatrix} 2l \\ l-m \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$.
Le polynôme de deux variables considéré étant homogène, il suffit de trouver le coefficient devant le monôme contenant $z_1^{l-m}$. On pose donc $z_2 = 1$.

Par la formule de Taylor, le coefficient de $\begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} (az_1+c)^{l-n}(bz_1+d)^{l+n}$ devant $z_1^{l-m}$ est :

$$\frac{1}{(l-m)!}\frac{d^{l-m}}{dz_1^{l-m}}\left(\begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} (az_1+c)^{l-n}(bz_1+d)^{l+n}\right)\Bigg|_{z_1=0}.$$

D'où

$$\pi^l_{m,n}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^{l-m}}{dz_1^{l-m}}\left(\begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} (az_1+c)^{l-n}(bz_1+d)^{l+n}\right)\Bigg|_{z_1=0}.$$

Le but recherché étant de trouver une relation entre ce coefficient et l'un des polynômes de Jacobi, on va rappeler une expression de ces derniers : lorsque $i$ et $j$ sont des réels strictement supérieurs à $-1$ et $k$ est un entier naturel,

$$P_k^{(i,j)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}(1-x)^{-i}(1+x)^{-j}\frac{d^k}{dx^k}\left((1-x)^{i+k}(1+x)^{j+k}\right).$$

On va donc effectuer, dans l'expression précédente de $\pi^l_{m,n}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, un changement de variable : posons $y-1 = 2b(az_1+c)$, i.e. $y+1 = 2a(bz_1+d)$ (car $ad-bc=1$). On obtient :

$$\begin{aligned}
\pi^l_{m,n}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} (2ab)^{l-m} \\
&\quad \times \frac{d^{l-m}}{dy^{l-m}}\left(\left(\frac{y-1}{2b}\right)^{l-n}\left(\frac{y+1}{2a}\right)^{l+n}\right)\Bigg|_{y=2bc+1} \\
&= \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!(l-n)!(l+n)!}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{-l-m}a^{-m-n}b^{-m+n} \\
&\quad \times \frac{d^{l-m}}{dy^{l-m}}\left((y-1)^{l-n}(y+1)^{l+n}\right)\Big|_{y=2bc+1}.
\end{aligned}$$

On pose à présent $x=-y$ et cela donne :

$$\begin{aligned}
\pi^l_{m,n}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!(l-n)!(l+n)!}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{-l-m}(-1)^{l-m}a^{-m-n}b^{-m+n} \\
&\quad \times \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left((-x-1)^{l-n}(-x+1)^{l+n}\right)\Big|_{x=-2bc-1} \\
&= \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!(l-n)!(l+n)!}\right)^{\frac{1}{2}} 2^{-l-m}(-1)^{-m-n}a^{-m-n}b^{-m+n} \\
&\quad \times \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left((1+x)^{l-n}(1-x)^{l+n}\right)\Big|_{x=-2bc-1}.
\end{aligned}$$

### 2.4.2 Relation avec un polynôme de Jacobi

On a remarqué précédemment que $SU_2$ était l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{C})$ s'écrivant sous la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
Pour une matrice comme celle-là, si on écrit $\alpha = ae^{i\varphi}$ et $-\overline{\beta} = be^{i\psi}$, avec $a, b \geqslant 0$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$, on a $a^2 + b^2 = 1$ et donc il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $a = \sin\theta$ et $b = \cos\theta$.
Ainsi, $SU_2$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta e^{-i\psi} \\ \cos\theta e^{i\psi} & \sin\theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix},$$

où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi, \psi \in [0, 2\pi[$.

Utilisons cela dans l'expression de la fin du paragraphe précédent :

$$\pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta e^{-i\psi} \\ \cos\theta e^{i\psi} & \sin\theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix} = \left( \frac{(l+m)!}{(l-m)!(l-n)!(l+n)!} \right)^{\frac{1}{2}} 2^{-l-m} (\sin\theta)^{-m-n}$$
$$\times (\cos\theta)^{-m+n} e^{-i(m+n)\varphi} e^{i(m-n)\psi} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} \left( (1+x)^{l-n}(1-x)^{l+n} \right)\Big|_{x=\cos 2\theta}.$$

La fin du membre de droite nous incite à calculer ce que donne $P^{(m+n,m-n)}_{l-m}(\cos 2\theta)$. On a :

$$\begin{aligned} P^{(m+n,m-n)}_{l-m}(\cos 2\theta) &= \frac{(-1)^{l-m}}{2^{l-m}(l-m)!} (1-\cos 2\theta)^{-m-n} (1+\cos 2\theta)^{-m+n} \\ &\quad \times \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} \left( (1+x)^{l-n}(1-x)^{l+n} \right)\Big|_{x=\cos 2\theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{l-m}}{2^{l-m}(l-m)!} (2\sin^2\theta)^{-m-n} (2\cos^2\theta)^{-m+n} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} \left( (1+x)^{l-n}(1-x)^{l+n} \right)\Big|_{x=\cos 2\theta}$$
$$= \frac{(-1)^{l-m}}{(l-m)!} 2^{-l-m} (\sin\theta)^{-2(m+n)} (\cos\theta)^{2(-m+n)} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} \left( (1+x)^{l-n}(1-x)^{l+n} \right)\Big|_{x=\cos 2\theta}.$$

On remarque alors que l'on a obtenu :

**Théorème 2.4.** *Pour tous* $l \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}, m, n \in \{-l, \ldots, l\}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} \pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta e^{-i\psi} \\ \cos\theta e^{i\psi} & \sin\theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix} &= (-1)^{l-m} \left( \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!} \right)^{\frac{1}{2}} (\sin\theta)^{m+n} (\cos\theta)^{m-n} \\ &\quad \times e^{-i(m+n)\varphi} e^{i(m-n)\psi} P^{(m+n,m-n)}_{l-m}(\cos 2\theta). \end{aligned}$$

C'est la relation tant recherchée entre les coefficients matriciels de notre représentation $\pi^l$ et les polynômes de Jacobi.

### 2.4.3 Utilisation des relations d'orthogonalité de Schur

Nous allons à présent devoir vérifier que les hypothèses nécessaires pour appliquer les relations d'orthogonalité de Schur sont vérifiées.

- Le groupe $SU_2$ est compact, on l'a déjà justifié avant le paragraphe 2.1.
- Il faut que l'espace $\mathcal{P}_{2l}$, dans lequel la représentation $\pi^l$ est à valeurs, soit un espace hermitien. Munissons le du produit hermitien tel que la base $(e_{-l}, \dots, e_l)$ soit orthonormale (il est de dimension $2l+1$).
- Nous avons déjà vu que la représentation $\pi^l$ est irréductible, il ne nous reste plus qu'à montrer le lemme suivant :

  **Lemme 2.5.** *Pour tout $l \in \mathbb{N}$, la représentation $\pi^l$ est unitaire.*

  *Démonstration.* Il suffit de prouver que, pour tout $g \in SU_2$, pour tout $(m,n) \in \{-l, \dots, l\}^2$, $\overline{\pi^l_{m,n}(g)} = \pi^l_{n,m}(g^{-1})$.

  Soient $m, n \in \{-l, \dots, l\}$, soit $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \in SU_2$. Alors, $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{bmatrix}$.

  De plus, d'après des formules précédentes sur les coefficients matriciels (la dernière du paragraphe 2.4.1. par exemple), $\pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ est un polynôme à coefficients réels en $\alpha$ et $\beta$, donc $\overline{\pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}} = \pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$. Il nous faut donc montrer que $\pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \pi^l_{n,m} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{bmatrix}$.

  Pour cela, revenons à la définition des coefficients matriciels : ils vérifient, pour tout $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU_2$, pour tout $n \in \{-l, \dots, l\}$,

$$\pi^l \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_n = \sum_{m=-l}^{l} \pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} e_m$$

  i.e., pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (az_1 + cz_2)^{l-n} (bz_1 + dz_2)^{l+n} = \sum_{m=-l}^{l} \binom{2l}{l-m}^{\frac{1}{2}} \pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z_1^{l-m} z_2^{l+m}.$$

  Afin d'obtenir une sorte de symétrie, multiplions cette relation par $\binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} w_1^{l-n} w_2^{l+n}$, où $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, et sommons sur $n$. Par la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}(az_1w_1 + bz_1w_2 + cz_2w_1 + dz_2w_2)^{2l} &= \sum_{m,n=-l}^{l} \binom{2l}{l-m}^{\frac{1}{2}} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} \pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\quad \times z_1^{l-m} z_2^{l+m} w_1^{l-n} w_2^{l+n}\end{aligned}.$$

Grâce à cette formule, on remarque qu'échanger les rôles de $m$ et $n$ revient à échanger ceux de $z_1$ et $w_1$ d'une part et $z_2$ et $w_2$ d'autre part. D'après le membre de gauche, cela revient à échanger $b$ et $c$. On a donc, pour tout $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU_2$, pour tout $(m,n) \in \{-l, \dots, l\}^2$,

$$\pi^l_{m,n} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pi^l_{n,m} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Cela nous permet d'en déduire exactement ce que l'on voulait, et donc d'obtenir l'unitarité de la représentation $\pi^l$. $\square$

Maintenant que nous avons vérifié toutes les hypothèses nécessaires, nous pouvons appliquer les relations d'orthogonalité de Schur à notre représentation $\pi^l$. Utilisons-les avec les vecteurs de notre base $(e_{-l}, \dots, e_l)$ qui, rappelons-le, est orthonormale pour le produit hermitien choisi : pour tous $(i,j), (m,n) \in \{-l, \dots, l\}^2$,

$$\int_{SU_2} \pi^l_{i,j}(g) \overline{\pi^l_{m,n}(g)} \mu(dg) = \frac{1}{2l+1} \delta_{i,m} \delta_{j,n}.$$

De plus, si $l \neq l'$, alors $\pi^l$ et $\pi^{l'}$ ne sont pas équivalentes (car à valeurs dans deux espaces de dimensions différentes) et donc, par le théorème 1.6., pour tous
$(i,j) \in \{-l, \dots, l\}^2, (m,n) \in \{-l', \dots, l'\}^2$,

$$\int_{SU_2} \pi^l_{i,j}(g) \overline{\pi^{l'}_{m,n}(g)} \mu(dg) = 0.$$

En rassemblant ces deux égalités, on obtient les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\forall l, l' \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}\{0,1\}, \forall i,j \in \{-l, \dots, l\}, \forall m,n \in \{-l', \dots, l'\},$$

$$\int_{SU_2} \pi^l_{i,j}(g) \overline{\pi^{l'}_{m,n}(g)} \mu(dg) = \frac{1}{2l+1} \delta_{l,l'} \delta_{i,m} \delta_{j,n}.$$

### 2.4.4 Relation d'orthogonalité pour les polynômes de Jacobi

On rappelle l'expression de la mesure de Haar sur $SU_2$ établie au paragraphe 2.1. : pour toute fonction $f$ continue sur $SU_2$,

$$\int_{SU_2} f d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} f \begin{bmatrix} \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta e^{-i\psi} \\ \cos\theta e^{i\psi} & \sin\theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \sin\theta \cos\theta d\theta d\psi d\varphi.$$

Utilisons ceci pour réécrire les relations d'orthogonalité du paragraphe précédent dans un cas particulier ($(i,j) = (m,n)$) : pour tous $l, l' \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}\{0,1\}$, $m, n \in \{-\min(l,l'), \ldots, \min(l,l')\}$,

$$\frac{2(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2m+2n+1} (\cos\theta)^{2m-2n+1} P_{l-m}^{(m+n,m-n)}(\cos 2\theta) \times P_{l'-m}^{(m+n,m-n)}(\cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2l+1}\delta_{l,l'}.$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \mapsto \cos 2\theta$ est injective. On peut donc effectuer le changement de variable $x = \cos 2\theta$. On a $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$, donc :

$$\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!2^{2m+1}} \int_{-1}^1 (1-x)^{m+n}(1+x)^{m-n} P_{l-m}^{(m+n,m-n)}(x) P_{l'-m}^{(m+n,m-n)}(x) dx = \frac{\delta_{l,l'}}{2l+1}.$$

**Théorème 2.6.** *Les polynômes de Jacobi vérifient les relations d'orthogonalité suivantes : pour tous $i, j, a, b \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{-1}^1 P_i^{(a,b)}(x) P_j^{(a,b)}(x) (1-x)^a (1+x)^b dx = \frac{2^{a+b+1}(a+i)!(b+i)!}{(a+b+2i+1)i!(a+b+i)!}\delta_{i,j}.$$

*Démonstration.* Soient $i, j, a, b \in \mathbb{N}$. La formule trouvée juste avant l'énoncé du théorème, appliquée avec $m = \frac{a+b}{2}$, $n = \frac{a-b}{2}$, $l = i + \frac{a+b}{2}$ et $l' = j + \frac{a+b}{2}$ donne directement le résultat. Montrons que l'on peut l'appliquer dans ce cas :
On a bien $l, l' \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}\{0,1\}$. Il reste à voir que $-l \leqslant m \leqslant l$, $-l \leqslant n \leqslant l$ et la même chose avec $l'$.
On a $a+b+i \geqslant 0$ i.e. $l+m \geqslant 0$ et $i \geqslant 0$, i.e. $l-m \geqslant 0$. De même, $a+i \geqslant 0$, i.e. $l+n \geqslant 0$, et $b+i \geqslant 0$, i.e. $l-n \geqslant 0$.
La même chose est valable en remplaçant $l$ par $l'$ (cela remplace $i$ par $j$) et les hypothèses nécessaires sont donc vérifiées. ☐

# 3 Equation de la chaleur sur $SU_2$

## 3.1 Opérateurs de Casimir et de Laplace sur $SU_2$

### 3.1.1 Quelques résultats généraux

On va commencer, dans cette section, par définir un opérateur différentiel $\Delta$, qui est appelé opérateur de Laplace. Mais, pour cela, il nous faut d'abord voir ce qu'est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un groupe de Lie linéaire $G$.

**Définition 3.1.** *Soit $G$ un groupe de Lie linéaire. Une fonction $f : g \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si*

- *pour tout $g \in G$ et tout $X \in \mathfrak{g} = Lie(G)$, la fonction $t \longmapsto f(g \exp tX)$ est dérivable en $0$. On pose alors*
$$(\rho(X)f)(g) = \frac{d}{dt} f(g \exp tX)\bigg|_{t=0}.$$
- *l'application*
$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} \times G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (X, g) & \longmapsto & (\rho(X)f)(g) \end{array}$$
*est continue.*

*On définit ensuite par récurrence une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ : $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur $G$ si $f$ est $\mathcal{C}^1$ et si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)f$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.*

On peut maintenant définir cet opérateur de Laplace.

**Définition 3.2.** *Soit $G$ un groupe de Lie linéaire dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure euclidienne et d'une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $G$. On pose alors*
$$\forall x \in G, \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2} f(x \exp tX_i)\bigg|_{t=0},$$
*c'est-à-dire*
$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)^2.$$

*Remarque :* L'opérateur différentiel $\Delta$ ainsi défini ne dépend pas de la base orthonormale choisie et l'opérateur $-\Delta$ est positif (pour le produit scalaire de $L^2(G)$). Pour les démonstrations de ceci (qui sont assez brèves), voir le livre de Faraut [2], pages 167-168.

Parlons à présent de l'opérateur de Casimir. Là encore, on s'appuiera sur ce qu'a fait Faraut [2] pour éviter de démontrer certains résultats.

**Définition 3.3.** *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire vérifiant $\langle [X,Y] | Z \rangle = -\langle Y | [X,Z] \rangle$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ et $\rho$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel $V$. Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathfrak{g}$, l'opérateur de Casimir $\Omega_\rho$ de la représentation $\rho$ est alors défini par*

$$\Omega_\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)^2.$$

*Remarque :* On peut voir dans le livre de Faraut [2] pages 125-126 qu'un tel produit scalaire existe toujours lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire compact.

**Proposition 3.1.** *La définition qui précède ne dépend pas du choix de la base orthonormée. De plus, l'opérateur $\Omega_\rho$ commute à la représentation $\rho$.*

*Démonstration.* Elle peut être trouvée dans le livre de Faraut [2], pages 126-127. □

**Lemme 3.2.** *Soit $G$ un groupe de Lie linéaire compact. L'opérateur de Laplace $\Delta$ défini précédemment est alors hermitien.*

*Démonstration.* Comme $G$ est compact, il existe, d'après la remarque précédente, un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ vérifiant l'hypothèse de la définition 1.3.. On note de plus $\mu$ la mesure de Haar normalisée de $G$. Alors, pour tous $f, \varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{d}{dt} f(g \exp tX) \Big|_{t=0} \overline{\varphi(g)} \mu(dg) &= \frac{d}{dt} \int_G f(g \exp tX) \overline{\varphi(g)} \mu(dg) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \int_G f(g) \overline{\varphi(g \exp -tX)} \mu(dg) \Big|_{t=0} \\
&= \int_G f(g) \, \frac{d}{dt} \overline{\varphi(g \exp -tX)} \Big|_{t=0} \mu(dg)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\langle \rho(X) f | \varphi \rangle = -\langle f | \rho(X) \varphi \rangle$$

pour le produit scalaire de $L^2(G)$. Donc, si $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$,

$$\langle \Delta f | \varphi \rangle = \langle f | \Delta \varphi \rangle.$$

□

**Proposition 3.3.** *Si $\rho$ est une représentation irréductible $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel complexe $V$ de dimension finie, alors il existe $\kappa_\rho \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\Omega_\rho = -\kappa_\rho I.$$

*Démonstration.* Par la proposition précédente, $\Omega_\rho$ commute à la représentation $\rho$ et donc, par le lemme de Schur, on a la conclusion. □

Donnons un dernier résultat un peu général avant d'utiliser tout cela dans le cas particulier du groupe $SU_2$.

**Proposition 3.4.** *Soient $G$ un groupe de Lie linéaire connexe et $\pi$ une représentation irréductible de $G$ dans un espace vectoriel complexe $V$ de dimension finie. On vient alors de voir qu'il existe $\kappa_\pi \in \mathbb{C}$ tel que $\Omega_\pi = -\kappa_\pi I$. Soit $f \in \mathcal{M}_\pi$. Alors, $f$ est une fonction propre de l'opérateur de Laplace :*

$$\Delta f = -\kappa_\pi f.$$

*Démonstration.* La fonction $f$ est une combinaison linéaire de coefficients de $\pi$, donc il existe $A \in \mathcal{L}(V)$ tel que

$$\forall g \in G, f(g) = \mathrm{tr}(A\pi(g)).$$

Donc, pour tout $g \in G$,

$$\Delta f(g) = \mathrm{tr}(\Omega_\pi A\pi(g)) = -\kappa_\pi f(g).$$

□

### 3.1.2 Application à $SU_2$

On peut maintenant utiliser ce que l'on vient de voir dans le cas du groupe $SU_2$, sur lequel on a déjà vu pas mal de choses. Nous allons donc calculer une expression explicite de l'opérateur de Casimir, ainsi que la valeur du coefficient $\kappa$ que nous avons vu précédemment.

On rappelle qu'une base de $\mathfrak{su}_2$ (l'algèbre de Lie du groupe $SU_2$) est $(X_1, X_2, X_3)$, où

$$X_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

On munit $\mathfrak{su}_2$ du produit scalaire suivant :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{su}_2, \langle X|Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY^*) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY).$$

Ce produit scalaire vérifie la condition de la définition 3.3. et $(X_1, X_2, X_3)$ est une base orthonormée.

**Proposition 3.5.** *Soit $\rho$ une représentation de $\mathfrak{su}_2$ dans un espace vectoriel complexe $V$. Comme on l'a déjà vu, $\rho$ se prolonge alors en une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On a alors*

$$-\Omega_\rho = \rho(H)^2 + 2\rho(H) + 4\rho(F)\rho(E),$$

*où on rappelle que*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Démonstration.* On remarque que l'on a $X_1 = iH$, $X_2 = E - F$ et $X_3 = i(E+F)$. D'où, grâce aux propriétés de $\rho$, qui est une représentation,

$$\begin{aligned}
&\rho(X_1)^2 = -\rho(H)^2,\\
&\rho(X_2)^2 = \rho(E)^2 + \rho(F)^2 - \rho(E)\rho(F) - \rho(F)\rho(E),\\
&\rho(X_3)^2 = -\rho(E)^2 - \rho(F)^2 - \rho(E)\rho(F) - \rho(F)\rho(E),
\end{aligned}$$

et donc, par définition de $\Omega_\rho$,

$$\Omega_\rho = -\rho(H)^2 - 2\rho(E)\rho(F) - 2\rho(F)\rho(E).$$

De plus, on a $[E, F] = H$, donc finalement

$$-\Omega_\rho = \rho(H)^2 + 2\rho(H) + 4\rho(F)\rho(E).$$

□

Soit $m \in \mathbb{N}$. Reprenons la représentation $\rho_m$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{P}_m$ (espace des polynômes homogènes de deux variables à coefficients dans $\mathbb{C}$) que nous avions utilisée dans la partie 2.2. et notons $\Omega_m = \Omega_{\rho_m}$ l'opérateur de Casimir associé. On a déjà vu (proposition 3.3.) qu'il existe un nombre $\kappa_m \in \mathbb{C}$ tel que

$$\Omega_m = -\kappa_m I.$$

**Proposition 3.6.** *On a*

$$\kappa_m = m(m+2).$$

*Démonstration.* Pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, on a $\Omega_m P = -\kappa_m P$. Appliquons cela avec le $(m+1)$-ème vecteur de la base de $\mathcal{P}_m$ que nous avions choisie au paragraphe 2.2.1. :
$P_m : (u, v) \longmapsto u^m$. On avait calculé, toujours au paragraphe 2.2.1. :

$$\begin{array}{l}\rho_m(H)P_m = mP_m\\ \rho_m(E)P_m = 0.\end{array}\quad .$$

Donc, par la formule de la proposition précédente,

$$-\Omega_m P_m = (m^2 + 2m)P_m.$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\kappa_m = m(m+2).$$

□

## 3.2 Séries de Fourier sur $SU_2$

Afin d'étudier dans la suite l'équation de la chaleur sur le groupe $SU_2$, il nous faut parler des séries de Fourier sur ce groupe. En effet, c'est d'abord pour résoudre ce problème que ces séries ont été introduites, sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (isomorphe à $SO_2$) bien sûr.

Nous avions écrit, dans la partie 1.3.5. (et notamment avec le théorème 1.8.) la décomposition en série de Fourier d'une fonction. Regardons ce que cela donne dans ce cas précis. Nous avons vu, dans la section 2., pour tout $m \in \mathbb{N}$, une représentation irréductible $\pi_m$ de $SU_2$ dans $\mathcal{P}_m$. Cet espace peut de plus être muni d'un produit scalaire hermitien pour lequel cette représentation est unitaire (on a vu cela dans la partie 2.4.). De plus, toute représentation irréductible de $SU_2$ est équivalente à l'une des $\pi_m$. On en déduit que $\widehat{SU_2}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute fonction $f$ intégrable sur $SU_2$, le coefficient de Fourier $\widehat{f}(m)$ est l'endomorphisme de $\mathcal{P}_m$ défini par

$$\widehat{f}(m) = \int_G f(x)\pi_m(x^{-1})\mu(dx)$$

et la série de Fourier de $f$ s'écrit

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\,\mathrm{tr}(\widehat{f}(m)\pi_m(x)).$$

De plus, par le théorème de Plancherel (théorème 1.8.), si $f \in L^2(SU_2)$,

$$\forall x \in SU_2, f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\,\mathrm{tr}(\widehat{f}(m)\pi_m(x)),$$

la convergence ayant lieu au sens de $L^2$, et la formule de Plancherel s'écrit :

$$\int_G |f(x)|^2\mu(dx) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)|||\widehat{f}(m)|||^2.$$

Notre objectif est à présent de montrer que la série de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ converge ponctuellement, et même uniformément. Il faut commencer par une première proposition.

**Proposition 3.7.** *Si $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $SU_2$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$\widehat{\Delta f}(m) = -m(m+2)\widehat{f}(m).$$

*Démonstration.* Soient $m \in \mathbb{N}$ et $u, v \in \mathcal{P}_m$. Alors,

$$\langle\widehat{f}(m)u|v\rangle_{\mathcal{P}_m} = \langle\int_G f(x)\pi_m(x^{-1})u\mu(dx)|v\rangle_{\mathcal{P}_m} = \int_G f(x)\langle\pi_m(x^{-1})u|v\rangle_{\mathcal{P}_m}\mu(dx).$$

On pose $\varphi : x \longmapsto \langle \pi_m(x^{-1})u|v\rangle_{\mathcal{P}_m}$. On a $\varphi \in \mathcal{M}_{\pi_m}$ et, de même,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\Delta f}(m)u|v\rangle_{\mathcal{P}_m} &= \langle \Delta f|\varphi\rangle_{L^2}\\ &= \langle f|\Delta\varphi\rangle_{L^2} \text{ (car } \Delta \text{ est hermitien)}\\ &= -m(m+2)\langle f|\varphi\rangle_{L^2} \text{ (car } \varphi \in \mathcal{M}_{\pi_m} \text{ et par la proposition 3.4.)}\\ &= -m(m+2)\langle \widehat{f}(m)u|v\rangle_{\mathcal{P}_m}.\end{aligned}$$

D'où la conclusion cherchée car ceci est valable pour tous $u, v \in \mathcal{P}_m$. □

**Théorème 3.8.** *Si $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $SU_2$, alors*

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{\frac{3}{2}}|||\widehat{f}(m)||| < \infty$$

*et la convergence de la série de Fourier de $f$ est donc uniforme.*

*Démonstration.* Le fait que la convergence de la série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{\frac{3}{2}}|||\widehat{f}(m)|||$ implique la convergence uniforme de la série de Fourier provient de la proposition VI-6.1. de Faraut [2], que nous ne détaillerons pas ici. Montrons donc la convergence de cette série : Par la proposition précédente, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\widehat{f}(m) = -\frac{1}{m(m+2)}\widehat{\Delta f}(m).$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^{\frac{3}{2}}|||\widehat{f}(m)||| &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)^{\frac{3}{2}}}{m(m+2)}|||\widehat{\Delta f}(m)|||\\ &\leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)^2}{m^2(m+2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)|||\widehat{\Delta f}(m)|||^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &< \infty \text{ (car la 2ème série converge par la formule de Plancherel).}\end{aligned}$$

D'où la conclusion par la proposition citée. □

## 3.3 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur sur le groupe $SU_2$ s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

où $u$ est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $I \times SU_2$ ($I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Nous allons dans cette partie nous intéresser au problème de Cauchy suivant : soit $f$ une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $SU_2$. On cherche une fonction $u$ continue sur $[0,+\infty[\times SU_2$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times SU_2$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ sur } ]0,+\infty[\times SU_2, \\ u(0,x) = f(x) \text{ pour tout } x \in SU_2. \end{cases}$$

### 3.3.1 Unicité de la solution

Nous allons commencer par montrer qu'une solution au problème de Cauchy énoncé précédemment, si elle existe, est unique. Pour cela, nous allons nous appuyer sur le principe du maximum :

**Proposition 3.9.** *Soit $T > 0$. Soit $u$ une fonction continue sur $[0,T] \times SU_2$ et $\mathcal{C}^2$ sur $]0,T[\times SU_2$ telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \textit{ sur } ]0,T[\times SU_2.$$

*Alors, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times SU_2$,*

$$\min_{g\in SU_2} u(0,g) \leqslant u(t,x) \leqslant \max_{g\in SU_2} u(0,g).$$

*Démonstration.* Soient $T_0 \in ]0,T[$ et $\varepsilon > 0$. On pose alors

$$u_\varepsilon : (t,x) \longmapsto u(t,x) + \varepsilon t.$$

Soit à présent $(t_0,x_0) \in [0,T_0] \times SU_2$ tel que

$$u_\varepsilon(t_0,x_0) = \min\{u_\varepsilon(t,x); (t,x) \in [0,T_0] \times SU_2\}$$

(le minimum existe car $u_\varepsilon$ est continue sur $[0,T_0]\times SU_2$ compact). Montrons par l'absurde que $t_0 = 0$ :
On suppose que $t_0 > 0$. Alors, on déduit de la définition de $(t_0,x_0)$ que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t_0,x_0) \leqslant 0 \text{ (et même } = 0 \text{ si } t_0 < T_0) \\ \Delta u_\varepsilon(t_0,x_0) \geqslant 0. \end{cases}$$

Ceci est absurde car

$$\forall (t,x) \in ]0,T[\times SU_2, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t,x) - \Delta u_\varepsilon(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \varepsilon - \Delta u(t,x) = \varepsilon > 0.$$

Donc $t_0 = 0$. De plus, pour tout $x \in SU_2$, $u_\varepsilon(0,x) = u(0,x)$, donc

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times SU_2, u_\varepsilon(t,x) \geqslant \min_{g\in SU_2} u(0,g), \text{ i.e. } u(t,x) \geqslant \min_{g\in SU_2} u(0,g) - \varepsilon t.$$

Ainsi, par passage à la limite ($\varepsilon \to 0$),

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times SU_2, u(t,x) \geqslant \min_{g\in SU_2} u(0,g).$$

L'autre inégalité s'obtient à partir de celle-ci en changeant $u$ en $-u$. □

**Théorème 3.10.** *Il existe au plus une solution au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \ sur \ ]0, +\infty[\times SU_2, \\ u(0,x) = f(x) \ pour \ tout \ x \in SU_2. \end{cases}$$

*Démonstration.* Comme l'équation de la chaleur considérée ici est linéaire, pour montrer l'unicité de la solution (éventuelle), il suffit de montrer que, si $f$ est constante égale à 0, alors la seule solution possible pour $u$ est la solution nulle.
Soit donc $u$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ sur } ]0, +\infty[\times SU_2, \\ u(0,x) = 0 \text{ pour tout } x \in SU_2. \end{cases}$$

Soit $(t,x) \in \mathbb{R} \times SU_2$. Par la proposition précédente,

$$\min_{g \in SU_2} u(0,g) \leqslant u(t,x) \leqslant \max_{g \in SU_2} u(0,g),$$

i.e.

$$u(t,x) = 0.$$

□

### 3.3.2 Expression de la solution

Maintenant que l'on a prouvé l'unicité de la solution, on va pouvoir s'intéresser à l'existence de celle-ci. On va donner l'expression d'une fonction qui vérifiera l'équation et les conditions initiales, et qui sera donc l'unique solution du problème de Cauchy.

Remarquons tout d'abord que, par ce qu'on a vu dans la partie 3.1., si $m \in \mathbb{N}$ et si $v_m \in \mathcal{M}_m$, on a alors

$$\Delta v_m = -m(m+2)v_m,$$

et donc la fonction

$$u_m : (t,x) \longmapsto e^{-m(m+2)t} v_m(x)$$

vérifie l'équation de la chaleur. La méthode de Fourier consiste ainsi à chercher la solution du problème de Cauchy sous la forme d'une somme de telles fonctions :

$$u : (t,x) \longmapsto \sum_m e^{-m(m+2)t} v_m(x).$$

Dans ce cas, la condition initiale $u(0,.) = f$ s'écrit

$$\sum_m v_m = f.$$

Or, comme on a supposé $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $SU_2$, on a, d'après la partie 3.2.,

$$\forall x \in SU_2, f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, \mathrm{tr}(\widehat{f}(m)\pi_m(x))$$

avec une convergence uniforme de la série de Fourier de $f$.

On pose alors

$$u : (t,x) \longmapsto \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) e^{-m(m+2)t}\, \mathrm{tr}(\widehat{f}(m)\pi_m(x)).$$

Cette série converge uniformément sur $[0,+\infty[\times SU_2$, donc $u$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times SU_2$ et vérifie l'équation de la chaleur. Cette fonction est ainsi l'unique solution du problème de Cauchy étudié.

*Remarque :* Sans détailler du tout, précisons quand même que, si $f$ est seulement continue sur $SU_2$, on peut tout de même donner une expression de la solution du problème de Cauchy en fonction de ce que l'on appelle le noyau de la chaleur [2] :

$$H : (t,x) \longmapsto \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) e^{-m(m+2)t} \chi_m(x) \ (t > 0 \text{ et } x \in SU_2),$$

où, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\chi_m$ est le caractère de la représentation $\pi_m$, défini par $\chi_m : g \longmapsto \mathrm{tr}(\pi_m(g))$. La solution du problème de Cauchy est alors

$$u : (t,x) \longmapsto \int_G H(t, g^{-1}x) f(g) \mu(dg) \ (\text{pour } t > 0).$$

# Références


[1] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy. *Special Functions.* Cambridge university press, 1999.

[2] Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie : Une introduction.* Calvage et Mounet, Paris, 2006.

[3] Tom H. Koornwinder. Representations of $SU(2)$ and Jacobi polynomials. 2007.

[4] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1986.

[5] Antoni Wawrzynczyk. *Group Representations and Special Functions.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1984.